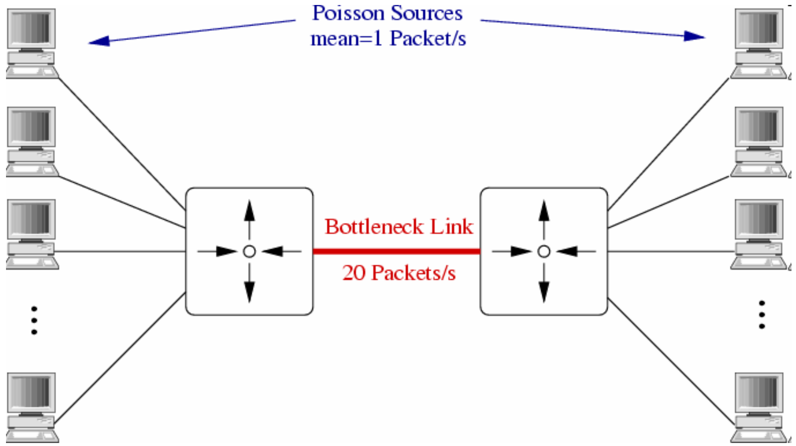
Modelos de Colas Poissonianos



CONTENIDOS

1. Introducción a las colas poissonianas.
2. Modelo de colas poissoniano con un servidor *M/M/1*
3. Modelo con un servidor y capacidad finita *M/M/1/K*
4. Modelo con varios servidores *M/M/c*. Fórmula *C* de Erlang
5. Modelo con infinitos servidores *M/M/∞*
6. Modelo con varios servidores y pérdidas *M/M/c/K*
7. Modelo M/M/c con pérdidas (modelo *M/M/c/c*). Fórmula *B* de Erlang.
8. Modelo con un servidor, población finita *M/M/1/K/K*
9. Modelo con c servidores, población finita *M/M/c/K/K*

5. Modelo *M/M/∞*: infinitos servidores

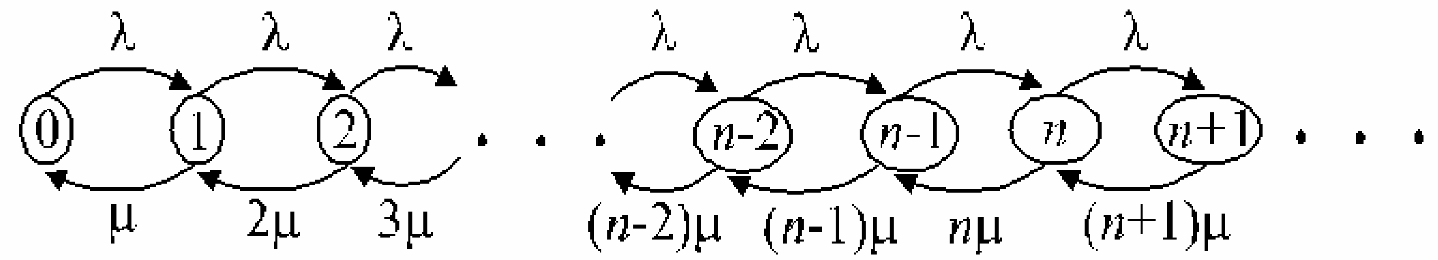
El sistema de espera tiene un número ilimitado de servidores, lo que significa que cada cliente que llega es servido inmediatamente.

A pesar de no haber competencia ni compartición de recursos, los resultados de este modelo pueden servirnos para estimar cantidades de interés en sistemas con un número *c* suficientemente grande de servidores.

Las tasas de nacimiento y muerte son

$$\lambda_n = \lambda, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$
$$\mu_n = n\mu, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

y su diagrama de transición es



Modelo con infinitos servidores *M/M/∞*

$$
\begin{aligned}
\pi_0\lambda &= \pi_1\mu \\
\pi_1(\lambda+\mu) &= \pi_0\lambda + 2\mu\pi_2 \\
\pi_2(\lambda+2\mu) &= \pi_1\lambda + 3\mu\pi_3 \\
&\cdots \\
\pi_n(\lambda+n\mu) &= \pi_{n-1}\lambda + (n+1)\mu\pi_{n+1} \\
&\cdots \\
\sum \pi_i &= 1
\end{aligned}
\Rightarrow
\begin{aligned}
\pi_0\lambda &= \pi_1\mu \\
\pi_1\lambda &= 2\mu\pi_2 \\
\pi_2\lambda &= 3\mu\pi_3 \\
&\cdots \\
\pi_n\lambda &= (n+1)\mu\pi_{n+1} \\
&\cdots \\
\sum \pi_i &= 1
\end{aligned}
\Rightarrow
$$

$$
\Rightarrow
\begin{aligned}
\pi_1 &= \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)\pi_0 \\
\pi_2 &= \frac{1}{2!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2\pi_0 \\
\pi_3 &= \frac{1}{3!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^3\pi_0 \\
&\cdots \\
\pi_n &= \frac{1}{n!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n\pi_0 \\
&\cdots \\
\sum \pi_i &= 1
\end{aligned}
\Rightarrow
\pi_0 = \left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n\right]^{-1} = e^{-\frac{\lambda}{\mu}}
$$

$$\Downarrow$$

$$\pi_n = \frac{(\lambda/\mu)^n}{n!}e^{-\frac{\lambda}{\mu}}, \quad n = 0, 1, \ldots$$

Modelo con infinitos servidores $M/M/\infty$

Se obtiene que la v.a. N sigue una distribución de Poisson de parámetro $r = \lambda/\mu$, con la condición de estabilidad $r < 1$.

Por tanto, $L = \lambda/\mu$, que indica el número medio de servidores ocupados. Además, $\sigma_N^2 = \lambda/\mu$.

Como no hay cola, $L_q = W_q = 0$.

El tiempo medio en el sistema es el tiempo medio de servicio: $W = W_s = 1/\mu$ (también deducible del resultado de Little $W = L/\lambda$).

Más aún, la distribución de w es como la de s, exponencial de parámetro μ.

6. Modelo *M/M/c/K*: con varios servidores y pérdidas

El modelo ya visto con *c* servidores idénticos presenta ahora una limitación de *K* clientes en la capacidad del sistema.

Si $n < c$, los clientes entran en el sistema y reciben servicio inmediatamente.
Si $c \leq n < K$, los clientes entran en el sistema pero tienen que esperar cola.
Si $n = K$, los clientes que llegan serán rechazados del sistema.

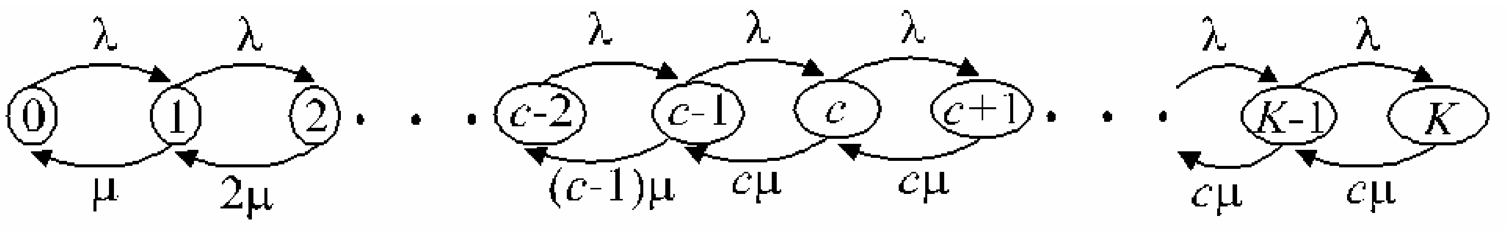
Las tasas de transición de estados son entonces

$$\lambda_n = \begin{cases} \lambda, & \text{si } n = 0, 1, ..., K-1 \\ 0, & \text{si } n \geq K \end{cases}$$

$$\mu_n = \begin{cases} n\mu, & \text{si } n = 1, 2, ..., c \\ c\mu, & \text{si } c \leq n \leq K \end{cases}$$

y su diagrama de transición es

Modelo con varios servidores y pérdidas *M/M/c/K*



El sistema de ecuaciones en equilibrio es:

Estado	Tasa entrada	=	Tasa salida
0	$\mu\pi_1$	$=$	$\lambda\pi_0$
$1 \le n \le c-1$	$\lambda\pi_{n-1} + (n+1)\mu\pi_{n+1}$	$=$	$(\lambda + n\mu)\pi_n$
$c \le n \le K-1$	$\lambda\pi_{n-1} + c\mu\pi_{n+1}$	$=$	$(\lambda + c\mu)\pi_n$
K	$\lambda\pi_{K-1}$	$=$	$c\mu\pi_K$

La expresión resultante para π_n es la misma que para el modelo *M/M/c*,

$$\pi_n = \begin{cases} \dfrac{u^n}{n!}\pi_0, & \text{si } n = 0, 1, ..., c \\ \dfrac{u^n}{c!c^{n-c}}\pi_0, & \text{si } n = c, ..., K \end{cases}$$

donde $u = \lambda/\mu$.

Modelo con varios servidores y pérdidas *M/M/c/K*

Pero al ser $\sum_{n=0}^{K} \pi_n = 1$, la probabilidad π_0 es

$$\pi_0 = \left[\sum_{n=0}^{c-1} \frac{u^n}{n!} + \sum_{n=c}^{K} \frac{u^n}{c!c^{n-c}} \right]^{-1}$$

$$= \begin{cases} \left[\sum_{n=0}^{c-1} \frac{u^n}{n!} + \frac{u^c}{c!} \frac{1-(u/c)^{K-c+1}}{1-u/c} \right]^{-1}, & \text{si } u/c \neq 1 \\ \left[\sum_{n=0}^{c-1} \frac{u^n}{n!} + \frac{u^c}{c!}(K-c+1) \right]^{-1}, & \text{si } u/c = 1 \end{cases}$$

Si $u/c<1$, cuando $K\to\infty$, las ecuaciones límite se convierten en las del modelo *M/M/c*. Además, haciendo $c = 1$, se convierten en los resultados del modelo *M/M/1/K.*

Modelo con varios servidores y pérdidas *M/M/c/K*

Medidas de rendimiento

Comenzamos calculando la longitud esperada de la cola:

$$
\begin{aligned}
L_q &= \sum_{n=c}^{K}(n-c)\pi_n = \frac{\pi_0}{c!}\sum_{n=c}^{K}(n-c)\frac{u^n}{c^{n-c}} = \frac{\pi_0}{c!}\sum_{n=c}^{K}(n-c)\frac{u^c u^{n-c}}{c^{n-c}} \\
&= \frac{u^c\pi_0}{c!}\frac{u}{c}\sum_{n=c}^{K}(n-c)\left(\frac{u}{c}\right)^{n-c-1} = \frac{u^c\pi_0 u/c}{c!}\sum_{n=0}^{K-c} n\left(\frac{u}{c}\right)^{n-1} \\
&= \frac{u^c\pi_0 u/c}{c!}\frac{d}{d(u/c)}\left(\sum_{n=0}^{K-c}\left(\frac{u}{c}\right)^{n}\right) = \frac{u^c\pi_0 u/c}{c!}\frac{d}{d(u/c)}\left(\frac{1-(u/c)^{K-c+1}}{1-u/c}\right) \\
&= \frac{u^c\pi_0 u/c}{c!}\frac{\left[1-(u/c)^{K-c+1}-(K-c+1)(u/c)^{K-c}(1-u/c)\right]}{(1-u/c)^2}.
\end{aligned}
$$

Calculamos L a partir de L_q, pues

Modelo con varios servidores y pérdidas *M/M/c/K*

$$
\begin{aligned}
L_q &= \sum_{n=c}^{K}(n-c)\pi_n = \sum_{n=c}^{K} n\pi_n - c\sum_{n=c}^{K}\pi_n = L - \sum_{n=0}^{c-1} n\pi_n - c\sum_{n=c}^{K}\pi_n \\
&= L - \sum_{n=0}^{c-1}(n-c)\pi_n - c,
\end{aligned}
$$

de donde:

$$L = L_q + c + \sum_{n=0}^{c-1}(n-c)\pi_n.$$

Al igual que en el modelo *M/M/1/K*, definimos la tasa media de entradas al sistema, $\lambda_e = \boldsymbol{\lambda}$, como $\lambda_e = \lambda\,(1 - \pi_K)$ y la utilización verdadera de cada servidor

$$\rho = \lambda_e W_s \,/\, c = (u/c)\,(1 - \pi_K).$$

De ahí deducimos mediante las fórmulas de Little los tiempos medios en el sistema y en la cola

Modelo con varios servidores y pérdidas *M/M/c/K*

$$W = L/\lambda_e$$
$$W_q = L_q/\lambda_e \quad \text{o} \quad W_q = W - 1/\mu.$$

El tiempo medio de espera en cola para aquellos clientes que tienen que esperar es

$$E(q \mid q > 0) = \frac{W_q}{P(q > 0)} = \frac{W_q}{1 - \sum_{n=0}^{c-1} \pi_n}$$

Las funciones de distribución de *q* y *w* son complejas, como en el M/M/1/K, al ser finitas las series. Las expresaremos a través de sumas acumulativas de Poisson. Condicionaremos a la v.a. N_e que cuenta el número de clientes en el sistema cuando entra un cliente en él, con

$$q_n = P(N_e = n) = \pi_n/(1-\pi_K), \quad n = 0,1,2,...,K\text{-}1.$$

Tendremos en cuenta que cuando $N_e=n$, el tiempo *q* de espera será el servicio de n-c+1 clientes. Así, para $t \geq 0$,

Modelo con varios servidores y pérdidas *M/M/c/K*

$$
\begin{aligned}
F_q(t) &= P(q=0) + P(0<q\le t) = \sum_{n=0}^{c-1} q_n + \sum_{n=c}^{K-1} P(q\le t \mid N_e = n) q_n \\
&= \sum_{n=0}^{c-1} q_n + \sum_{n=c}^{K-1} \left[\int_0^t c\mu e^{-c\mu x}\frac{(c\mu x)^{n-c}}{(n-c)!}dx\right] q_n \\
&= \sum_{n=0}^{c-1} q_n + \sum_{n=c}^{K-1} \left[1 - \int_t^\infty c\mu e^{-c\mu x}\frac{(c\mu x)^{n-c}}{(n-c)!}dx\right] q_n \\
&= \sum_{n=0}^{c-1} q_n + \sum_{n=c}^{k-1} q_n - \sum_{n=c}^{K-1} q_n \left[\sum_{i=0}^{n-c}\frac{(c\mu t)^i e^{-c\mu t}}{i!}\right] = 1 - \sum_{n=c}^{K-1} q_n \left[\sum_{i=0}^{n-c}\frac{(c\mu t)^i e^{-c\mu t}}{i!}\right] \\
&= 1 - \sum_{n=0}^{K-c-1} q_{n+c} F_{\mathcal{P}(c\mu t)}(n).
\end{aligned}
$$

donde

$$
F_{\mathcal{P}(c\mu t)}(n) = \sum_{i=0}^{n-c}\frac{(c\mu t)^i e^{-c\mu t}}{i!} = \int_t^\infty c\mu e^{-c\mu x}\frac{(c\mu x)^{n-c}}{(n-c)!}dx
$$

(igualdad debida a la relación entre las distribuciones de Erlang y Poisson) es la función de distribución de Poisson de parámetro *cμt* en el punto *n*, que puede obtenerse a partir de las tablas de dicha distribución.